試験開始まで、次のページ以降を見てはいけません。

数学ⅡB

注　意　事　項

1　問題は次のページから始まります。試験開始までページを進めないようにし,注意事項をよく読んでください。

2　問題には、マークシートは付属していません。必要なら各自で用意してください。

3　問題には,計算用紙は付属していません。各自で用意してください。枚数に制限はありません。

4　制限時間は 60 分です。各自で管理してください。

5　この模試では、数学 B の選択問題はありません。「数列」「ベクトル」を解答してください。

第１問 (配点 30)

[1]

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で連立不等式

$\sin\theta + \cos\theta \geqq \frac{\sqrt{6}}{2}$ ・・・(1)

$\cos 2\theta + 3\sin\theta \geqq 2$ ・・・(2)

について考えよう。

(1)の左辺は

$$\sqrt{\boxed{ア}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{イ}}\right)$$

と変形できるので,(1)を満たす θ の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{ウエ}} \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{オ}}{\boxed{ウエ}}\pi$$

である。

$\cos(\alpha+\beta)$を三角関数の加法定理を用いて展開すると,$\cos(\alpha+\beta)=\boxed{カ}$である。

$\boxed{カ}$には,適当なものを次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

① $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

② $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

③ $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(2)を $\sin\theta$ だけの式で表し、因数分解すると,

$(\boxed{キ}\sin\theta - \boxed{ク})(\sin\theta - \boxed{ケ}) \leqq 0$

となる。

したがって,(2)を満たす θ の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{コ}} \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{サ}}{\boxed{コ}}\pi$$

である。

n を 12 以下の正の整数として,$\theta = \frac{n}{24}\pi$と表されるもののうち、連立方程式(1),(2)を満たす n の値の個数は$\boxed{シ}$個ある。

[2]

n を正の整数として,

$A=6^{n^2-8n+15}$とする。

A は n=$\boxed{ス}$のとき、最小値$\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$をとる。

A が 50 桁の数になるように n の値を定めよう。ただし、$\log_{10}2=0.30$,$\log_{10}3=0.48$ とする。
A の常用対数をとると,

$\log_{10}A=\boxed{タ}.\boxed{チツ}\times(n^2-8n+15)$
である。これより、A が 50 桁以上の数になる最小の n は n=$\boxed{テト}$であり、この n=$\boxed{テト}$のとき
$\log_{10}A=\boxed{ナニ}.\boxed{ヌ}$となり、確かに A が 50 桁の数になることがわかる。$\boxed{ナニ}.\boxed{ヌ}$には小数点第 2 位を四捨五入したものを答えよ。

また,n=$\boxed{テト}$+1 のとき,A は$\boxed{ネノ}$桁の数であることから、A が 50 桁の数になるのは n=$\boxed{テト}$のときに限る。

第 2 問 (配点 30)

2 次関数

$y=f(x)=ax^2+bx+c$ のグラフは点(2,3)を通り,

$f'(-1)=-7, f'(3)=9$ を満たす。

このとき,a=$\boxed{ア}$,b=$\boxed{イウ}$,c=$\boxed{エ}$である。

f(x)のグラフの点(3,f(3))における接線は,傾きが$\boxed{オ}$で,x 切片が$\boxed{カキク}$である。

また,f(x)のグラフと x 軸で囲まれてできる図形の面積は$\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$である。

点(-2,-3)から f(x)のグラフに引いた接線を求めよう。

接点を(t,f(t))とすると,接線の方程式は t を用いて

$y=(\boxed{シ}t-\boxed{ス})x-\boxed{セ}t^2+\boxed{ソ}$

で表される。これが点(-2,-3)を通ることから,

t に関する方程式

$t^2+\boxed{タ}t-\boxed{チ}=0$

が導かれる。

(-2,-3)から f(x)のグラフに引いた接線に関して正しいのは$\boxed{ツ}$である。

$\boxed{ツ}$には以下の⓪～④から当てはまるものを選べ。

⓪　接線は 1 本存在し, 傾きは負である。

①　接線は 1 本存在し,傾きは正である。

②　接線は 2 本存在し,傾きはともに正である。

③　接線は 2 本存在し,傾きは 1 本が正 1 本が負である。

④　接線は 2 本存在し,傾きは負である。

第 3 問 (配点 20)

数列$\{a_n\}$を初項 200 公差-6 の等差数列とし,$\{a_n\}$の第 1 項から第 n 項までの和の S_n とする。

$a_n=\boxed{アイ}n+\boxed{ウエオ}$
$S_n=\boxed{カキ}n^2+\boxed{クケコ}n$
である。

$a_n<0$ となる最小の n は$\boxed{サシ}$であり,$S_n<0$ となる最小の n は$\boxed{スセ}$である。

数列 b_n を

$b_n=\frac{1}{anan+1}$と定義し,$T_n=\sum_{k=1}^{n} bk$とする。

$b_n=\frac{-\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\left(\frac{1}{an}-\frac{1}{an+1}\right)$
と変形できるので,

$T_n=\left(\frac{n}{200(\boxed{チツテ}-\boxed{ト}n)}\right)$と表される。

$T_n<0$ となる最小の n は$\boxed{ナニ}$である。

第 4 問 (配点 20)

三角形 OAB について,OA=3,OB=2,cos∠AOB=$\frac{1}{2}$である。線分 OB を 3:1 に外分する点を C とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とする。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{ア}$, $\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\vec{b}$である。

線分 BA 上にあり BA を s: (1-s)に内分する点を P,線分 OA 上にあり OA を t: (1-t)に内分する点を Q とする。

$\overrightarrow{CP}=s\vec{a}-\left(s+\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\right)\vec{b}$

$\overrightarrow{CQ}=t\vec{a}-\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\vec{b}$

C,P,Q が同一直線上にあるとき,t は s を用いて

$t=\frac{\boxed{ク}s}{\boxed{ケ}+\boxed{コ}s}$と表される。

特に,線分 PQ と線分 OA が垂直であるとき,

$s=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$である。

OAB の面積を S とすると三角形 OPQ の面積は$\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$S である。